

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ТЕХНОЛОГИИ
ОБРАБОТКИ В СОВМЕСТНОМ ИССЛЕДОВАНИИ
СТРУКТУРЫ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ, АЛГОРИТМОВ
И АРХИТЕКТУРЫ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

Предлагаются подход к совместному исследованию структуры решаемых задач, алгоритмов и архитектуры непрерывно-дискретной вычислительной системы, преобразование простой непрерывной машины в машину фон Неймана и пространственно-временную развертку графа безусловного конвейерного вычислителя.

Введение

В качестве математических основ исследования структуры решаемых задач, алгоритмов и архитектуры выбран новый класс вычислимых функций действительных переменных (ВФДП). Универсальной формой представления задачи, алгоритма и архитектуры вычислительной системы является направленный граф.

ВФДП, в отличие от классической теоретической информатики, основывается на операциях дифференциальной рекурсии, интегрирования, бесконечных пределах, преобразованиях Фурье и Лапласа. Основной идеей ВФДП является идея однозначного продолжения (расширения) функции, определенной на интервале $[0, \tau)$ или $[a, a + \tau)$ на весь интервал $[0, \infty)$, где $\tau \geq 0$, $a \geq 0$. Используя эти операции и преобразования, можно построить модели вычислений, равносильные машинам Тьюринга.

Теоретическое обоснование применения аналого-цифровой технологии обработки непрерывно-дискретной вычислительной системы (НДВС) для решения динамических операторов (системы обыкновенных дифференциальных уравнений), статических операторов (алгебраические преобразования), нелинейных и тригонометрических преобразований является актуальной задачей, т.к. позволяет, с одной стороны, расширить область применения аналого-цифровой технологии обработки для обрабатываемой компоненты нейросетей, с другой – разработать единую методику проектирования аналого-цифрового компьютера и обрабатываемой компоненты нейросетей.

1. Структурная схема НДВС и модели вычислений

В первом разделе статьи разработана теория НДВС на основе моделей трех уровней, укрупненной ее структуры и основных моделей аналого-цифровых вычислений.

Совместное исследование структуры решаемых задач, алгоритмов и архитектуры вычислительных систем отождествляется с объектно-ориентированным проектированием.

Наш подход к совместному исследованию аналого-цифровой технологии обработки основывается на моделях трех уровней: информационной,

функциональной и структурной [2]. Взаимосвязь трех моделей проектирования представлена на рисунке 1. В моделях проектирования выделяются статический и динамический аспекты.

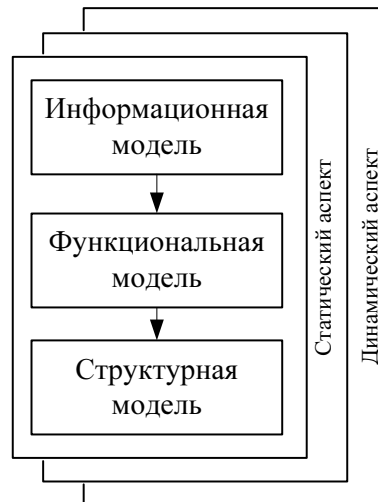


Рис. 1 Взаимосвязь моделей проектирования

Информационная модель аналого-цифровой технологии обработки представляется в виде информационного графа, вершинами которого являются информационные процессы, а дугами обозначены связи между ними. В качестве информационных процессов вводятся: формирование, передача, хранение, преобразование, переработка, распределение и управление.

На информационной модели можно выделить процессы, которые свойственны только аналоговой и цифровой технологиям обработки. Хотя в настоящее время в сигнальных процессорах и микроконтроллерах присутствуют аналого-цифровые преобразователи (АЦП) и цифроаналоговые преобразователи (ЦАП) информации.

Структурная схема многопроцессорной непрерывно-дискретной вычислительной системы представлена на рисунке 2.

Если мы укрупним структурную схему непрерывно-дискретной системы, как показано на рисунке 1 (штриховые линии), то получим укрупненную структурную схему, изображенную на рисунке 3. В практическом случае любой физический процесс – аналоговое вычисление его собственного поведения.

Датчики и физический процесс представляются непрерывной динамической системой. Цифровой процессор, хост-процессор, память, дисплей и программа обозначены дискретной динамической системой. Остальные узлы структурной схемы названы интерфейсом между дискретными и аналоговыми вычислениями (рис. 3).

Информационная модель НДВС позволяет рассматривать три принципа представления данных системы.

Первый принцип представления данных (внешняя схема представления данных) сводится к отображению данных на экране пользователя.

Второй принцип представления данных (внутренняя схема представления) – определение данных в терминах структур файлов, в которых эти данные хранятся и обновляются.

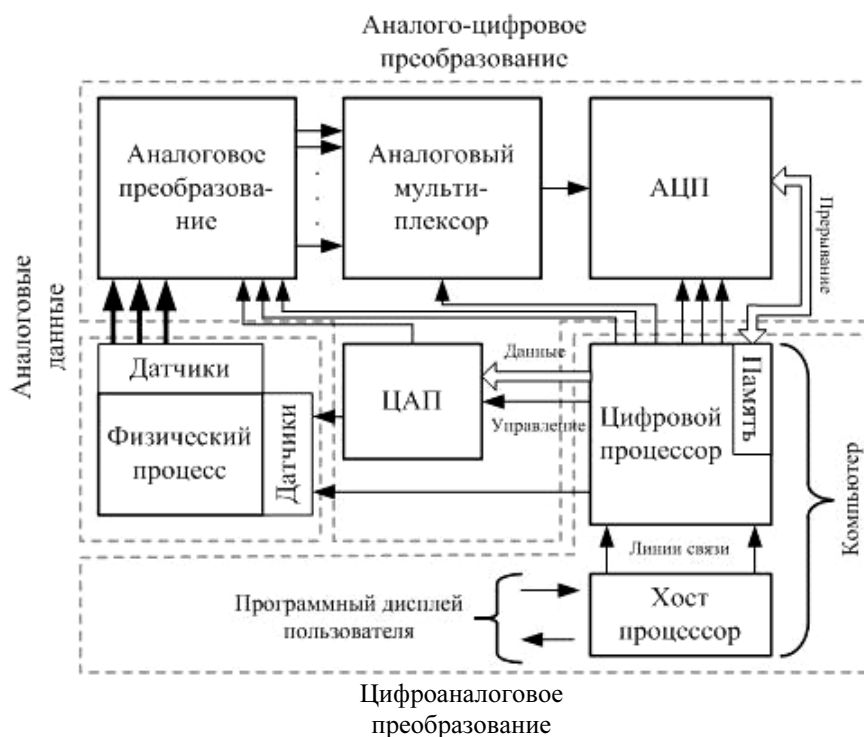


Рис. 2 Структурная схема непрерывно-дискретной вычислительной управляемой системы



Рис. 3 Укрупненная структурная схема непрерывно-дискретной системы

Третий принцип представления данных используется для идеальной среды управления данными и состоит в концептуальной схеме представления данных, которая сводится к единому (интегрированному) определению данных в рамках одной системы.

Концептуальная схема представления данных не связана ни с каким конкретным их использованием и не зависит от способа хранения данных и доступа к ним. Важнейшая цель концептуальной схемы представления данных – непротиворечивая интерпретация данных и взаимодействие между ними.

Под функциональной моделью понимается функционирование НДС, в котором информационные процессы представлены совокупностью операторов и функций.

На рисунке 4 изображены основные модели аналоговых и дискретных вычислений. Сравнение моделей аналоговых вычислений более подробно рассмотрено в предыдущей работе автора [2].

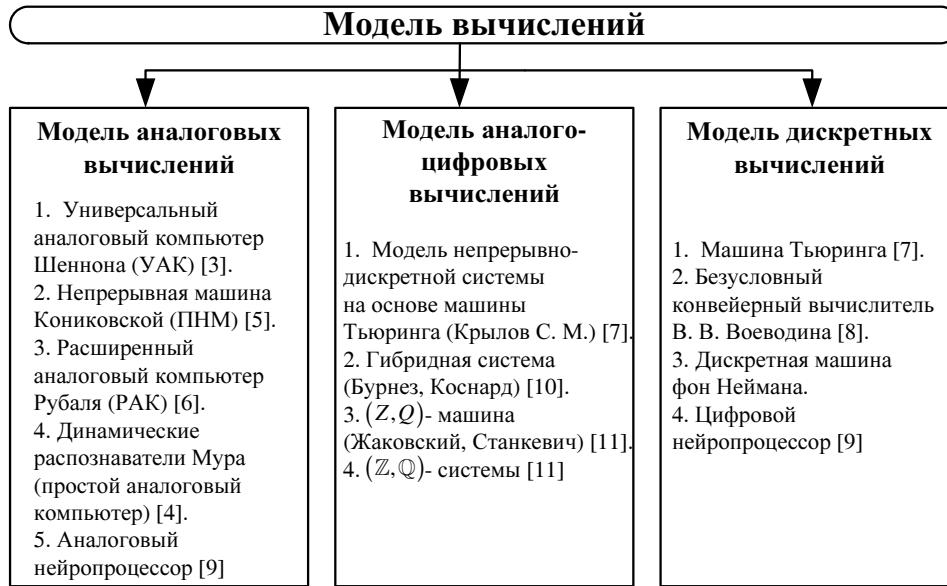


Рис. 4 Основные модели аналоговых, дискретных и аналого-цифровых вычислений

Технология аналоговых машин достигла существенного уровня развития с 40–50-х гг. XX в. В настоящее время интерес к аналоговым вычислениям возрос в связи с развитием аналоговой элементной базы на СБИСах [6].

В качестве общности описания вычислительных машин выступает вид вычислимой функции. На самом нижнем уровне находятся дифференциально-алгебраические функции (ДА), которые являются уникальными решениями полиномиальных дифференциальных уравнений. Этот набор функций включает также простые функции как показательные, так и тригонометрические, а также их суммы и произведения.

Функция $f(x)$ является ДА, если ее производные удовлетворяют равенству $P((x), f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x)) = 0$, для некоторого многочлена P с рациональными коэффициентами (рациональное число есть отношение целого числа к не равному нулю натуральному). Не – ДА функции называются трансцендентными.

Трансцендентные функции реализуются расширенным аналоговым компьютером (РАК), предложенным Л. Рубелем [6].

2. Преобразования простой непрерывной машины

Введем определение простой непрерывной машины (ПНМ) Б. Кониковской.

Определение 1. Для любого $\tau \geq 0$ под ПНМ памяти длиной τ мы понимаем такой оператор $M \in U_\tau$, что

$$(\tau > 0) \wedge (\forall f_0 \in DM) \cdot (M(f_0)|[0, \tau]) = f_0 \vee (\tau = 0) \wedge (\forall x \in DM) (M(x)(0) = x); \quad (1)$$

$$(\forall f \in RM) \cdot (\forall a \geq 0) \cdot (f_a \in RM), \quad (2)$$

где RM – множество вычислений машины M и каждый элемент этого множества называется вычислением машины; U_τ – множество частичных функций вида $A:F_\tau \rightarrow F$,

$$F_\tau = X^{[0,\tau)}; F = X^{[0,\infty)},$$

где X – произвольное множество (в нашем случае $X = R$); R – множество действительных чисел; DM – область определения оператора M .

Запишем f_a вместо $(f|[a,\infty))$ и $f_{a,a+\tau}$ вместо $(f|[a,a+\tau))$; * – операция сдвиг, которая определяется следующим образом:

$$f_{a,a+\tau}(t) = f(a+\tau) \text{ для } 0 \leq t \leq \tau;$$

$$f_a(t) = f(a+t) \text{ для } t \geq 0.$$

Представление простой непрерывной машины на основе непрерывно-временной динамической системы позволяет, с одной стороны, расширить ее до классической машины фон Неймана и обрабатывающей компоненты нейросети, с другой, генерировать вычисляемые функции как решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Цель второго раздела статьи заключается в разработке теории по преобразованию ПНМ и переходу от ее памяти к адресной, регистровой и аналоговой памяти, а также анализ взаимного расположения графиков решений дифференциального уравнения $y' = ky$ при их сдвиге.

При соответствующей интерпретации памяти τ можно перейти к адресной, регистровой и аналоговой памяти.

Определение 2. Под аналого-цифровой памятью понимается множество частичных функций $\mathcal{F} = X^{[0,\infty)}$, если выполняются следующие условия:

1. $[0,\infty) \cap X \neq \emptyset$,
2. $(\forall f \in \mathcal{F})$ (в Df можно выделить счетное (конечное) число вложенных интервалов);
3. $(\forall f \in \mathcal{F}) [0,\tau) \in Df$,

где \emptyset – пустое множество; Df – область определения функции f ; X – произвольное множество, равное для аналоговой памяти множеству действительных чисел.

Тогда

$$c \in \Sigma^A \text{ и } R \subseteq Z^{[0,m]},$$

где Σ , Z – множество букв входного алфавита адресной и регистровой памяти; A – множество адресов и $A = l \cup N$; N – число регистров за исключением регистра команд (r) и счетчика команд (l); m – число разрядов регистра.

В каждый момент времени t_i следующее состояние адресной памяти определяется таким образом:

$$c'(x) = \Psi(c) = \Phi[c(c(l))](c),$$

где $c'(x)$ – следующее состояние адресной памяти с адресом x ; $c(l)$ – содержимое счетчика команд; $c(c(l))$ – содержимое адресной памяти; $\Phi[c(c(l))] = r^*$ – команда машины фон Неймана (МФН); Φ – функция кодирования, $r^*(c) = c$,

$$N = N_1 \cup N_2,$$

где N_2 – число каналов от датчиков непрерывных величин и запоминающих элементов аналоговой памяти.

Для модели, которая имеет совокупность МФН или микропроцессоров, рассматриваем множество счетчиков команд l_1, \dots, l_n и регистров команд r_1, \dots, r_n .

Следующее состояние адресной памяти определяется формулой

$$c'(x) = \Psi(c) = \Phi[c(c(l_1)), c(c(l_2)), \dots, c(c(l_n))](c),$$

где $\Phi[c(c(l_1)), c(c(l_2)), \dots, c(c(l_n))] = r^*$ и $r^*(c) = c$.

В случае аналоговой памяти выделение интервала $[0, \tau)$ равносильно заданию структуры аналоговой памяти. Укажем здесь некоторые особенности кодирования частичных функций $f \in \mathcal{F}$ аналоговой памяти, определенных на интервалах $[0, \tau), [0, \infty)$ для $\tau \geq 0$. Из практики известно, что оператор над аналоговой памятью для постоянного запаздывания τ можно представить в виде передаточной функции

$$B = e^z,$$

где $z = -p\tau$ или $-s\tau$;

$$B_\tau = \{ B | B : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \},$$

где p – оператор дифференцирования; s – в общем случае комплексное число, тем самым оператор B отождествляется со структурой оператора M и переход к B осуществляется функцией кодирования, как в регистровой и адресной памяти.

Известно, что экспоненту можно представить в виде пределов, степенным и дробным рядом Паде:

$$(\exp)z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n; \quad (\exp)z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{2n}\right)}{\left(1 - \frac{z}{2n}\right)^n}; \quad (\exp)z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Переход к дифференциальным уравнениям осуществляется довольно просто.

Напомним, что ПНМ Б. Кониговской может начинать работать не только с начального интервала $[0, \tau)$, но и произвольного интервала $[a, a + \tau]$, где $a \geq 0$.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y' = y(y' = ky)$, которое получается из $ay' + by = c$ при $a=1, b=-1, c=0$. Множество всех решений этого уравнения обозначим A .

Рассмотрим один случай $y^{(1)} = pe^x$ и $y^{(2)} = qe^x$, $p, q \in R$ и $p, q > 0$. Тогда

$$y_{\ln \frac{p}{q}}^{(2)}(x) = y^{(2)}\left(\ln \frac{p}{q} + x\right) = qe^{\ln \frac{p}{q} + x} = pe^x = y^{(1)}(x)$$

для любого $x \in R^+$.

Таким образом, при сдвиге графика решения $y^{(2)}$ на величину $\ln \frac{p}{q}$ к началу координат $y^{(2)}$ совмещается с $y^{(1)}$ (рис. 5).

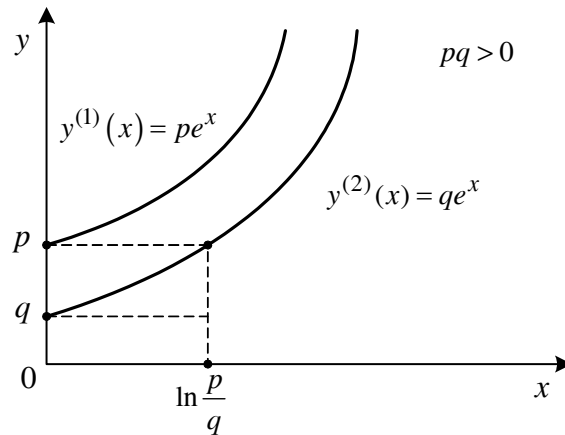


Рис. 5 Взаимное расположение графиков решений $y^{(1)}, y^{(2)}$ для $y' = y(y' = ky)$, $p > 0$ и $q > 0$

3. Преобразование ПНМ в пространственно-временную развертку графа алгоритма

Пространственно-временную развертку графа алгоритма можно представить ПНМ. Граф $G = (V, E)$ задан, если заданы непустое множество вершин V и множество ребер E . Граф изображается в виде некоторой схемы на плоскости или пространстве. При этом вершины графа V изображаются точками (рис. 6), а пары точек u, v , для которых существует ребро (u, v) , соединяются непрерывной линией.

Момент выполнения j -й операции на вычислительной системе (ВС) обозначим через t_j .

Вектором временной развертки назовем $t = (t_1, t_2, \dots)$, обозначим через h_j время, необходимое для реализации j -й операции, и назовем вектор $h = (h_1, h_2, \dots)$ вектором реализации. Тогда время начала j -й операции определяется как координата вектора $t - h$.

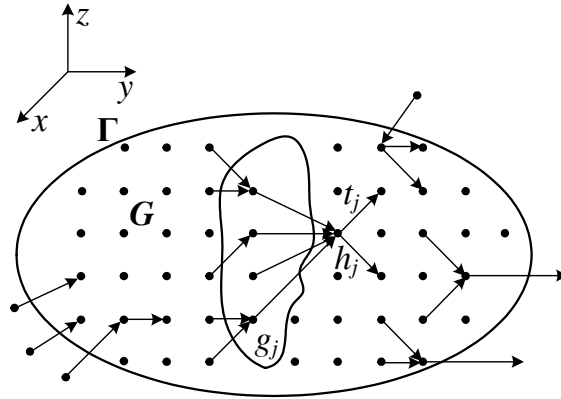


Рис. 6 Геометрическое представление графа алгоритма.

Теоретическое обоснование представления ПНМ на основе непрерывно-временной динамической системы и разработка методики проектирования гибридного компьютера, обрабатывающей компоненты нейрокompьютера, является актуальной задачей, т.к. позволяет, с одной стороны, провести аналогию алгоритма работы ПНМ и пространственно-временной развертки графа алгоритма НДВС, с другой, унифицировать аналоговую и цифровую технологии обработки информации.

Цель третьего раздела статьи заключается в разработке теории для преобразования с помощью ПНМ графа безусловного конвейерного вычислителя (БКВ) в пространственно-временную развертку БКВ, которая является периодической.

По временной развертке алгоритма время $T(t)$ реализации алгоритма определяется выражением

$$T(t) = \max_j t_j - \min_j (t_j - h_j).$$

Параллельной формой алгоритма называется разбиение вида

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i,$$

где V_1, V_2, \dots, V_k – непересекающиеся подмножества, которые называются ярусами параллельной формы. Число k называется высотой.

Обычно алгоритм начинает реализовываться в нулевой момент времени $t = 0$ и заканчивается в $t = T$. В промежутке $0 < t < T$ выполняется хотя бы одна операция. Исследование графа алгоритма удобнее проводить по временным разверткам. Из рисунка 6 видно, что координаты описываются следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} t_j &\geq \max_{l \in g_j} t_l + h_j, \text{ если } g_j \neq \emptyset; \\ t_j &\geq S_j, \text{ если } g_j = \emptyset, \end{aligned} \quad (3)$$

где g_j – множество номеров вершин, из которых идут дуги в вершину с номером j ; \emptyset – пустое множество.

Координаты $t_j(3)$ разбиваются на две группы. Одну группу составляют координаты, для которых $g_j \neq \emptyset$. Координаты второй группы задают моменты ввода исходной информации. Координаты первой группы определяются однозначно после задания координат второй группы. $\max_{l \in g_j} t_l$ означает

момент окончания подачи в вершину последнего данного. Таким образом, выполняется условие готовности любого оператора к реализации. Нестрогое равенство (\geq) означает, что промежуточный результат должен оставаться в памяти, если же промежуточный результат непосредственно подается к другой вершине, то неравенство (\geq) переходит в равенство ($=$).

Зная моменты включения–выключения операторов, граф алгоритма можно преобразовать в параллельную форму и определить время реализации алгоритма и другие его характеристики [8].

На рисунке 7 изображено логическое представление пространственно-временной развертки графа алгоритма.

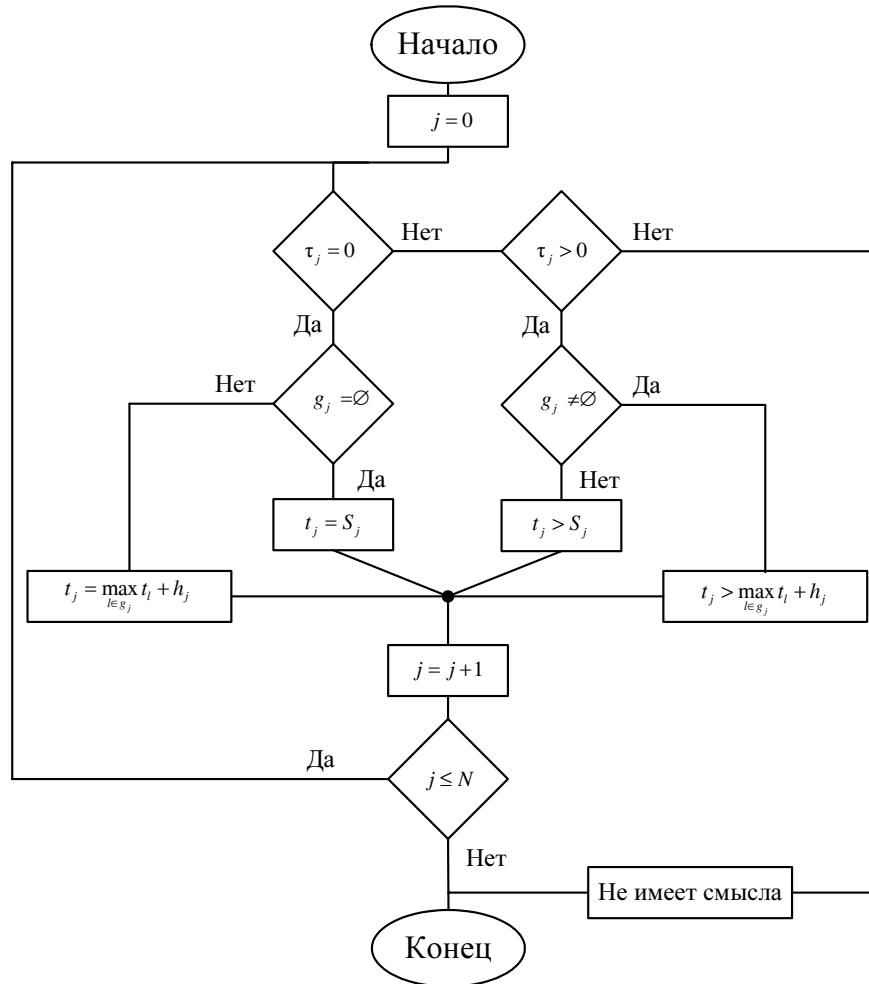


Рис. 7 Логическое представление пространственно-временной развертки графа алгоритма

На рисунке 8 представлен фрагмент графа алгоритма из двух вершин.

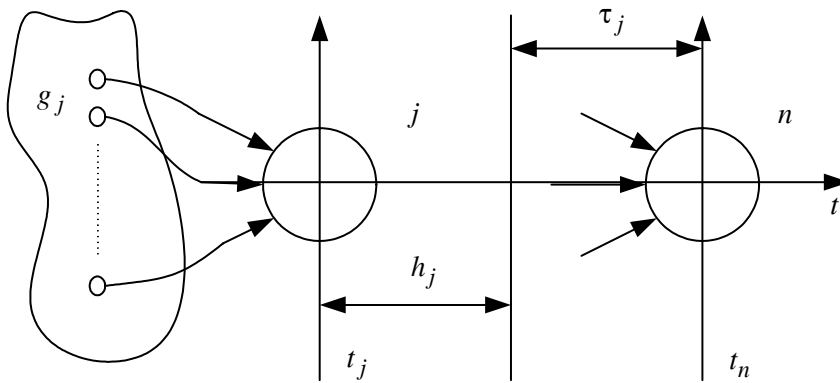


Рис. 8 Фрагмент графа алгоритма из двух вершин

Длина дуги из вершины j в вершину n означает [10] длину интервала времени, равную сумме h_j и τ_j . Если результат оператора j остается в памяти на время τ_j , то t_j больше правой части следующего выражения:

$$t_j \geq \max_{l \in g_j} t_l + h_j.$$

Если же результат не остается в памяти, то $\tau_j = 0$, и

$$t_j = \max_{l \in g_j} t_l + h_j.$$

Под структурной моделью НДВС понимается представление системы в виде совокупностей преобразователей информации, связанных в пространстве и времени.

Пример 2. Использование модели ПНМ для безусловного конвейерного вычислителя (БКВ). Граф БКВ представлен на рисунке 9.

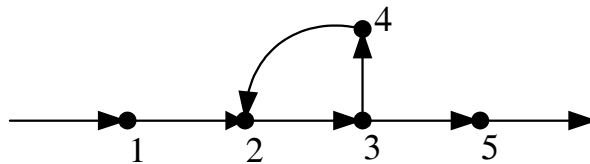


Рис. 9 Граф безусловного конвейерного вычислителя

На рисунке 10 дана развертка графа БКВ. В этом примере $\tau = 3$ и, начиная с этого момента времени, развертка графа становится периодической, и, если осуществлять сдвиг развертки влево на начало координат, то вторая часть полностью покроев первую часть ($0 < t \leq \tau$).

Как показывают примеры 1, 2, функция, вычисляемая ПНМ, является периодической.

Ранее отмечалось, что новые архитектуры будут выглядеть как гиперкубы и решетки, которые обладают симметрией (параллельные переносы). В

связи с этим модель ПНМ, (Z, Q) -машины, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) -системы можно использовать при проектировании гибридных и цифровых систем, а также обрабатывающей компоненты нейросети.

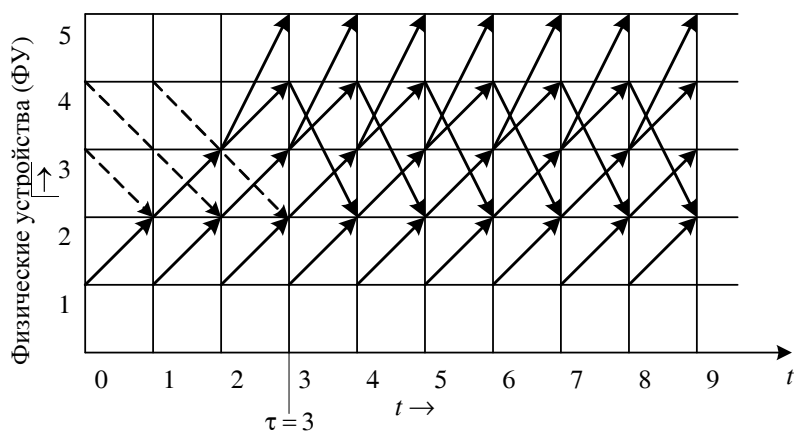


Рис. 10 Развертка графа безусловного конвейерного вычислителя

Заключение

Основным результатом статьи является создание научных основ современных аналого-цифровых технологий обработки информации, разработка математических моделей и построения структуры и алгоритмов работы непрерывно-дискретной вычислительной системы.

В результате теоретических исследований можно сделать следующий вывод. Вычислимые функции, генерируемые простой непрерывной машиной $(\tau - ВФ)$, (Z, Q) -машиной $(Z, Q - ВФ)$, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) -системой $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q} - ВФ)$, можно использовать при разработке методики проектирования гибридного процессора, обрабатывающей компоненты нейросети для аппроксимации непрерывной функции (универсальный аппроксиматор). Учитывая многозначный и неточный характер значений функций на интервалах $[0, \tau)$, $[a, a + \tau)$, $[0, \infty)$, $[a, \infty)$, где $\tau \geq 0$, $a \geq 0$, можно обобщить множества, используемые в статье, и применять нечеткие множества [9].

Список литературы

1. **Пальченков, Ю. Д.** Об одном подходе к аналоговой, цифровой и аналого-цифровой технологии разработки / Ю. Д. Пальченков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2007. – № 3. – С. 257–271.
2. **Пальченков, Ю. Д.** Об одном подходе к проектированию многопроцессорных непрерывно-дискретных вычислительных систем / Ю. Д. Пальченков // Цифровые модели в проектировании и производства РЭС : межвуз. сборник научных трудов. – Вып. 7. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. – С. 64–74.
3. **Шеннон, К.** Математическая теория дифференциального анализатора / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике : пер. с англ. – М. : Иностранная литература, 1963. – С. 709–728.
4. **Moor, C.** Dynamical recognizers real – time language recognition by analog computers / C. Moor // Theoretical Computer Science. – 1998. – № 201. P. 99–136.

5. **Konicowska, B.** Formalization of the Notion of an Analog Computer Described by Linear Differential Equation with Constant Coefficients / B. Konicowska // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci/ Math. Astronom. Phys. – 1972. – V. 20. – № 12. – P. 1015–1020.
6. **Rubel, L. A.** A survey of transcendently transcendental functions / L. A. Rubel // Amer. Math. Monthly. – 1989. – № 96 (9). P. 777–788.
7. **Крылов, С. М.** Модели универсальных дискретно-аналоговых вычислительных машин на основе машины Тьюринга / С. М. Крылов // Электронное моделирование. – 1982. – № 3. – С. 6–10.
8. **Воеводин, В. В.** Теория параллельных алгоритмов и программ / В. В. Воеводин. – М. : ОВМ АН СССР, 1987. – 127 с.
9. **Рутковская, Д.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский ; пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.
10. **Bournez, O.** On the computational power and super-Turing capabilities of dynamical systems / O. Bournez, M. Cosnard // Ecole Normale Superieure de Lyon, France. Research Report. – 1995. – № 95-30. – 38 p.
11. **Stankiewicz, E.** Some basic properties of the (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) -systems / E. Stankiewicz, W. Zakowski // Bull. Acad. Polon. Sci, Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1978. – V. 26. – № 6. – P. 537–561.